L'HISTOIRE ET L'ÉPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES AU SERVICE DE LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Groupe A.H.M.E.S.
Irem de Clermont-Ferrand [1]

L'histoire a la vertu de nous dépayser,
de nous « étonner de ce qui va de soi ».
Évelyne Barbin

Résumé : Dans cet article, nous allons présenter une partie des réflexions menées par notre groupe de recherche (AHMES) de l'IREM de Clermont-Ferrand qui intervient dans le cadre d'une unité d'enseignement portant sur l'histoire et l'épistémologie des mathématiques au sein du Master métiers de l'enseignement. Parmi les thèmes abordés, nous nous sommes intéressés au problème de l'introduction des tangentes à une courbe et du lien avec le nombre dérivé. L'activité produite sera décrite ici et servira de support pour illustrer, de façon plus générale, nos objectifs de formation et notre méthodologie. Nous souhaitons défendre l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants (initiale et continue) en en montrant quelques bienfaits et présenter la façon dont nous concevons le recours à la perspective historique.

Les formations et documents décrits dans le présent article sont le fruit d'un travail mené par le groupe de recherche A.H.M.E.S. de l'Irem de Clermont-Ferrand (Apports de l'Histoire des Mathématiques aux Enseignants du Secondaire) dont l'acronyme a été inspiré par le nom d'un scribe égyptien, Ahmès, qui a rédigé, vers 1650 avant J.-C., le fameux papyrus de Rhind si important en histoire des mathématiques égyptiennes.

Ce groupe constitué de six enseignants de mathématiques du secondaire (cinq en lycée, un en collège) et d'un enseignant-chercheur du supérieur (intervenant à l'ESPE), a pour objectif de questionner l'utilité d'une dimension historique dans le parcours de formation des nouveaux enseignants, et plus largement dans la formation continue des enseignants. L'idée est de montrer comment l'enseignant peut enrichir sa compréhension des concepts contenus dans les programmes d'enseignement et se familiariser avec des aspects didactiques de sa discipline grâce à un éclairage historique. Son pro-

1 Les membres du groupe A.H.M.E.S. en 2018 (Apports de l'Histoire des Mathématiques aux Enseignants du Secondaire) sont : Emmanuelle BOYER, lycée Émile Duclaux, Aurillac, Alex ESBELIN, ESPE Université Clermont Auvergne, Florian JOB, lycée Jean Zay, Thiers, Frédéric LAURENT, lycée Jeanne d'Arc, Clermont-Ferrand et ESPE Université Clermont Auvergne, Jean-Marc PILANDON, lycée Jeanne d'Arc, Clermont-Ferrand, Benjamin RECH, lycée Montdory, Thiers, Claire ROSALBA, collège Mortaix, Pont-Du-Château.

longement naturel est de dégager les effets de cet éclairage au niveau des classes et les bénéfices éventuels pour les élèves.

Ainsi, le groupe a non seulement produit une réflexion sur ces sujets, mais a également mis au point et testé des documents en formation initiale ou continue. Le premier à avoir été conçu traite de « l'introduction de la notion d'équation au cycle 4 », le second porte sur « l'introduction du nombre dérivé et des tangentes en classe de 1ère scientifique ». L'activité produite, qui a été expérimentée avec des étudiants professeurs stagiaires dans le cadre du Master 2 MEEF ainsi que des professeurs titulaires en formation continue, sera présentée ici et servira de support pour illustrer, de façon plus générale, nos objectifs de formation et notre méthodologie. Le troisième thème que nous avons abordé traite de « l'introduction des nombres relatifs au cycle 4 » et notre travail en cours examine « la structuration de l'enseignement de la proportionnalité en géométrie au cycle 4 ».

Dans cet article, nous souhaitons défendre l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants en en montrant quelques bienfaits et présenter la façon dont nous concevons le recours à la perspective historique dans le cadre de cette formation. Ce point de vue, porté depuis longtemps par les Irem et la commission Inter Irem « histoire et épistémologie des mathématiques », a d'ailleurs trouvé un soutien récent dans le rapport « Villani – Torossian » daté du 12 février 2018 [2]. De plus, on peut désormais considérer que le rôle de cette perspective historique dans la compréhension de l'activité mathématique et sa valeur interdisciplinaire font partie intégrante de la première des compétences communes à tous les professeurs, « maîtriser les savoirs disciplinaires et leur didactique », du référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation [3].

Nous commencerons par aborder les grands principes qui fondent de notre démarche en précisant quels peuvent être les bénéfices d'un recours à l'histoire et l'épistémologie en formation, puis nous décrirons notre méthodologie en nous appuyant sur un exemple. Enfin, avant de tirer des conclusions générales, nous évoquerons quelques éléments concernant l'évaluation de la formation.

Le recours à l'histoire et l'épistémologie en formation ou l'art d'organiser un dépaysement

Dans notre optique, le premier bénéficiaire de l'éclairage historique n'est pas l'élève mais bien le professeur lui-même. Son travail

2 Villani et Torossian, *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, février 2018. Dans ce rapport, de nombreux passages évoquent l'utilité de l'introduction d'une perspective historique non seulement en classe, mais également dans la formation des enseignants. Page 35, il est écrit « tout d'abord, l'épistémologie et l'histoire de la construction des notions mathématiques, qui apportent une réelle richesse didactique, sont peu enseignées en formation initiale ». Puis, page 52, « cependant, pour un enseignant, l'apport de la recherche se situe principalement bien après sa formation initiale. C'est tout au long de sa carrière qu'il doit actualiser et renouveler son enseignement. […] Certains s'intéresseront surtout à la recherche en pédagogie, d'autres aux nouveaux résultats obtenus dans telle ou telle branche de la discipline, d'autres encore à l'histoire des mathématiques, sans bien sûr que cela soit exclusif. Les apports de la recherche se laissent ainsi répartir le long de deux grands axes, l'un centré sur la pédagogie, l'autre sur le disciplinaire et l'historique. »

3 Référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation. Arrêté du 1-7-2013 - J.O. du 18-7-2013. Il est stipulé en compétence P1 : connaître de manière approfondie sa discipline ou ses domaines d'enseignement. En situer les repères fondamentaux, les enjeux épistémologiques et les problèmes didactiques. Contribuer à la mise en place de projets interdisciplinaires au service des objectifs inscrits dans les programmes d'enseignement.

préparatoire, sa réflexion ne sont pas forcément visibles pour la classe. Il oriente son enseignement selon sa propre compréhension des notions qu'il doit enseigner. L'éclairage historique peut lui permettre de mieux anticiper des difficultés d'apprentissage, de mieux appréhender les obstacles éventuels, mais aussi de mieux comprendre l'intérêt des notions elles-mêmes, car les élèves sont demandeurs de sens et il est parfois bien difficile d'improviser une réponse à la question qui revient sans cesse dans leur bouche : « à quoi ça sert ? ». Ainsi, Évelyne Barbin, historienne des sciences et professeur à l'université de Nantes, écrit [4] :

« L'histoire a la vertu de nous dépayser, de nous "étonner de ce qui va de soi" comme l'écrit l'historien Paul Veyne. […] Le dépaysement est aussi bien mathématique que culturel. Il peut nous permettre de comprendre les difficultés de nos élèves qui ne sont pas, comme nous enseignants, en pays connu. Il nous aide aussi à mieux entendre leurs questions ou à mieux interpréter leurs erreurs. »

Appuyant son concept de dépaysement par de nombreux exemples, elle conclut son article sur la nécessité d'une perspective historique dans la formation mathématique :

« Il y a donc des enjeux spécifiques de l'histoire dans la formation des enseignants. Dans la formation initiale des enseignants, elle va à l'encontre d'un savoir "scolaire" et d'un savoir de plus en plus "hétéroclite". Dans la formation continue des enseignants, elle autorise une réflexion sur les contenus et les programmes enseignés. […] L'introduction de l'histoire des mathématiques va à l'encontre d'une vision arbitraire des procédures mathématiques enseignées. La connaissance historique permet à un enseignant, auquel un élève demande "à quoi ça sert ?", de ne pas répondre "en maths, c'est comme ça qu'on fait" ou "vous verrez plus tard". »

Pourtant la spécificité de la pratique des mathématiques peut laisser penser que les enseigner c'est ignorer leur histoire. En effet, si l'on estime que les évolutions successives ont permis d'aboutir à un concept bien déterminé, celui qui sera l'objet de notre enseignement, on peut se demander s'il y a un quelconque intérêt de faire le chemin inverse. Christian Houzel écrit :

« Le travail des mathématiciens est souvent consacré à reprendre des théories anciennes et à les refondre dans un cadre nouveau, à partir d'un point de vue élargi et plus puissant, qui explique mieux des résultats connus et en fait découvrir de nouveaux. La matière des mathématiques, ce sont des théories, soit déjà mathématiques, soit tirées d'autres sciences ; les refontes successives que les mathématiques font subir aux théories gomment l'histoire. » [5]

À la vérité, ce chemin retour peut s'avérer risqué pour un enseignant. Un éventuel écueil serait de procéder à une lecture téléologique et réinterpréter les mathématiques d'autrefois à la lumière des connaissances actuelles, voire, à l'extrême, de considérer que les procédures anciennes ne sont pas correctes (pas rigoureuses) à l'aune des mathématiques actuellement enseignées, prises comme totalement abouties et immuables. Il y a donc lieu de former les enseignants : de mettre à leur disposition à la fois du savoir en histoire et épistémologie des mathématiques, mais surtout un minimum de méthodologie.

Nous partons de la conclusion partagée que les jeunes enseignants ont « une percep-

4 Barbin, Repères IREM n°80, 2010, p.76.
5 Houzel, Bulletin inter IREM, n°18, 1979, p.3.

tion de leur discipline presque exclusivement implicite et conforme aux idées communément admises »[6]. L'objectif de la formation envisagée consiste alors davantage à interroger et ébranler d'une part les images préconçues des notions mathématiques – à *dépayser* comme le dit Évelyne Barbin – et d'autre part l'idée intuitive de leur historicité, qu'à mettre à disposition des masses de connaissances historiques. La formation doit également faire acquérir des compétences, notamment méthodologiques, comme la vigilance historique lors de la lecture de textes et leur contextualisation. La première permet d'éviter des interprétations erronées, comme évoqué plus haut, la seconde fait partie de l'activité de l'historien des sciences qui doit replacer le document dans le temps et dans l'espace, chercher à identifier le public pour lequel il a été créé et dans quel but. Ainsi, nous voyons apparaître les rôles respectifs du support historique et du formateur : l'histoire et l'épistémologie des mathématiques sont utilisées comme des outils pour susciter la réflexion des jeunes enseignants sur les contenus disciplinaires et le formateur devient une personne ressource pour organiser cette réflexion. Il lui faut en effet accompagner les formés dans l'appropriation des textes et leur fournir les connaissances historiques nécessaires, ou à défaut, les sources primaires ou secondaires permettant de les acquérir.

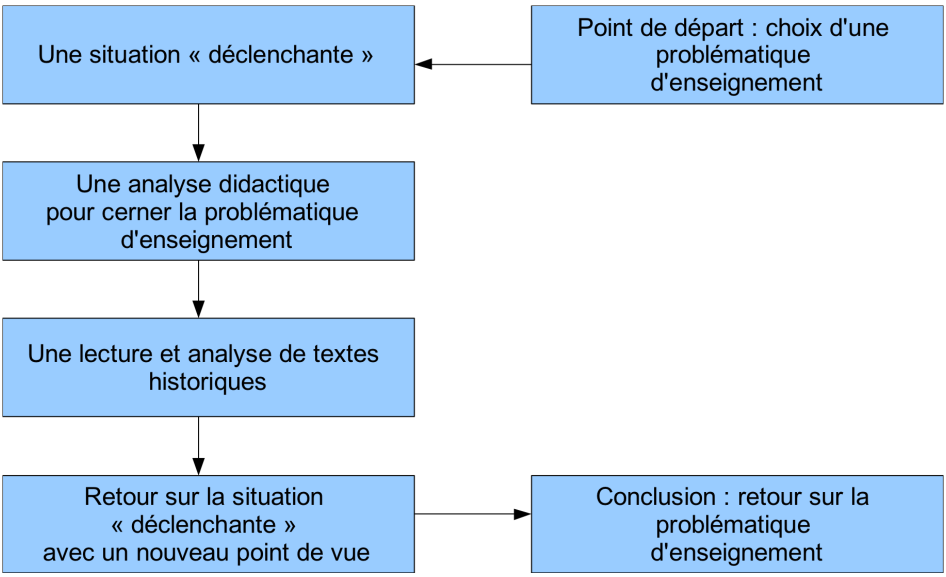
Une méthodologie pour une mise en œuvre de la perspective historique en formation

La séance de formation traitant de « l'introduction des tangentes et du nombre dérivé en classe de première scientifique », que nous allons décrire, s'inscrit dans un cycle de quatre journées de formation dans le cadre de l'unité d'enseignement « histoire et épistémologie des mathématiques » du master 2 MEEF, mention 2, parcours mathématiques. Elle a également été éprouvée avec des professeurs titulaires, dans une forme légèrement modifiée, lors d'un stage d'une journée dans le cadre du plan académique de formation.

Le format assez court de cette séance oblige tout d'abord à une recherche d'efficacité maximale. Par exemple, la lecture de textes anciens, si lecture il y a, doit nécessairement être limitée car c'est une activité qui demande du temps. L'accompagnement par le formateur permet toutefois de faciliter une telle lecture. Ce dernier ne doit pas se lancer dans un exposé solitaire, le but visé est de mettre les stagiaires le plus possible en activité et de faire naître le questionnement. Pour permettre de réussir le pari du *dépaysement*, nous avons mis au point une méthodologie très précise, schématisée page ci-contre.

Comme nous souhaitons mettre l'accent sur des notions mathématiques difficiles à enseigner, le point de départ est donc une problématique d'enseignement. Issue de notre expérience personnelle et de nos échanges, cette problématique doit cristalliser les difficultés ressenties par le professeur lorsqu'il prépare ses cours, notamment à l'approche d'une nouvelle notion : nombreux sont les moments où il sait qu'il va devoir amener les élèves vers des notions difficiles, parfois non intuitives, dont il va avoir du mal à justifier d'emblée l'utilité en mathématiques et en sciences en général. L'idée est bien de s'adresser directement au professeur pour la préparation et la conception de ses cours. Au niveau du lycée, nous nous sommes donc intéressés à l'introduction du nombre dérivé en classe de première scientifique car nous savons que cette notion constitue une nouveauté particulièrement ardue pour les élèves mais également pour le professeur qui doit exposer de nouvelles méthodes. En effet, l'étude des variations d'une fonction est jusque là abordée de manière purement algébrique (comparaison de

6 De Vittori & Loeuille, *Petit x*, n°80, 2009, p. 8.



Méthodologie pour la conception d'une séance de formation.

deux images quelconques) et les fonctions rencontrées étant construites par opérations à partir des fonctions de référence, dont les variations sont connues, leur étude ne présente pas de réelle difficulté, si ce n'est une certaine dextérité en algèbre. Pourquoi donc introduire un nouveau concept, celui de la dérivation ? Cette nouveauté peut paraître bien déroutante pour les élèves, d'autant qu'il n'est pas évident de montrer d'entrée l'intérêt ni l'efficacité de ce concept. Et pourtant l'enjeu de cet apprentissage est important puisque chacun sait à quel point l'outil « dérivation » est utile et puissant pour étudier des phénomènes modélisables par des fonctions. Voilà comment naît ce que nous avons nommé une « problématique d'enseignement ».

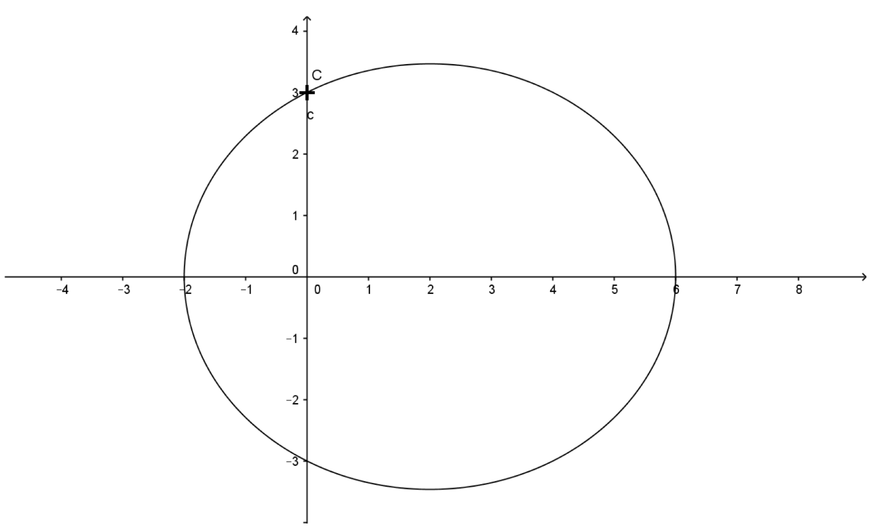
Par ailleurs, les programmes officiels demandent d'introduire les notions nouvelles de façon problématisée : elles doivent être une réponse à un problème donné. L'idée est de donner du sens à ce que l'on enseigne. Connaître un théorème, une définition, une méthode, etc. c'est avant tout comprendre : pour cela, un dispositif pédagogique réduit à un discours de l'enseignant suivi d'une série d'exercices d'application ne peut suffire ; et pour comprendre, il faut d'abord savoir comment et en réponse à quoi la nouvelle connaissance a été développée et avec quelles difficultés. Il nous semble qu'une piste possible pour le questionnement soit à trouver dans l'histoire des mathématiques. Nous pourrions donc assigner à l'introduction d'une perspective historique et épistémologique une nouvelle fonction qui serait de permettre de faire évoluer les pratiques enseignantes vers celle préconisée par les programmes. En effet, elle doit d'abord aider les enseignants à se réapproprier le sens des notions qu'ils enseignent. Pour le professeur débutant, nous pouvons supposer que la dérivation est un outil maîtrisé qui s'impose naturellement dans l'étude d'une fonction ou la recherche d'une tangente à une courbe, sans nécessairement que toutes les clés de compréhension lui aient été fournies dans son cursus.

C'est pourquoi, à partir de cette problématique de départ, nous cherchons une « situation déclenchante », c'est-à-dire un problème court que les formés seraient amenés à résoudre et qui permettrait de faire émerger les représentations initiales (voir schéma de la méthodologie plus haut). Pour le thème qui nous occupe, nous avons retenu la situation suivante : une ellipse dont l'équation est connue a été tracée dans un repère orthonormé, un point C est fixé sur cette ellipse et il s'agit de déterminer le point d'intersection de la normale en C à l'ellipse avec l'axe des abscisses.

Par le biais de cet exercice préliminaire, nous souhaitons mettre en évidence qu'un professeur débutant fait naturellement appel à l'outil « dérivée » pour résoudre le problème, c'est-à-dire à la « procédure experte » qu'il doit précisément enseigner à ses élèves. En effet, il est possible de considérer la fonction dont la partie supérieure de l'ellipse est la courbe représentative, puis grâce à un calcul de dérivée, de déterminer le coefficient directeur de la tangente en C et enfin celui de la normale. Pour ce faire, nous laissons un temps de recherche individuel ou en binôme, puis nous demandons à un étudiant stagiaire d'exposer sa solution au tableau devant le groupe.

Problème introductif

Dans un repère orthonormé, on considère l'ellipse d'équation $3x^2 + 4y^2 - 12x = 36$. Le point C(0 ; 3) appartient à cette ellipse. Construire la tangente à l'ellipse au point C et déterminer P le point d'intersection de la normale en C avec l'axe des abscisses.



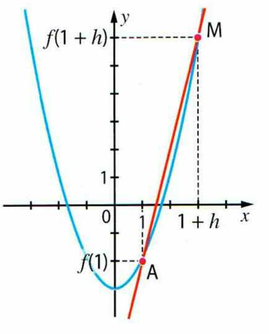
À la suite de cette situation déclenchante, nous leur proposons une analyse didactique (cf. schéma de la méthodologie) dont le support peut être un extrait des programmes officiels, une page de manuel, des productions d'élèves... Cette analyse didactique a pour but de mieux cerner la problématique d'enseignement : pourquoi cette notion est-elle difficile à enseigner ? Quelles en sont les difficultés inhérentes ? Quels blocages peut-elle entraîner chez les élèves ?

Partie A : analyse didactique. Voici une activité d'introduction classique du nombre dérivé avec une fonction polynôme du second degré extraite du manuel « Indice 1ère S » :

2 Animation autour d'un point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$, $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.
Soit h un réel non nul et M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $1 + h$.

1. On utilise un logiciel de géométrie pour afficher le coefficient directeur $r(h)$ des droites (AM) pour différentes valeurs de h.
Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0 :
a. de quel point s'approche le point M ?
b. que semble devenir le coefficient directeur $r(h)$?



2. a. Montrer que le coefficient directeur de la droite (AM) est $r(h) = 2 + h$.
b. De quelle valeur s'approche $r(h)$ lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ?
Ce nombre est appelé *limite de $r(h)$ quand h tend vers 0*. On le note m dans la suite.

3. a. Déterminer une équation de la droite T passant par le point A et de coefficient directeur m.
b. Tracer sur la calculatrice la courbe $\mathscr{C}$ et la droite T.
c. En utilisant la fonction zoom de la calculatrice, effectuer des agrandissements successifs autour du point A.
Que constate-t-on pour la droite T et la courbe $\mathscr{C}$?
La droite T est appelée la *tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A*.

Questions :
1) a) Sur quoi s'appuient les auteurs de l'activité pour construire une idée intuitive de limite ?
b) Comment les élèves vont-ils appréhender la façon dont s'effectue un calcul de limite ?
2) Dans la question 3c quelle semble être la définition sous-entendue de la tangente à une courbe ? Comparer cette définition avec celle de la tangente à un cercle connue des élèves.
3) Quels semblent être les objectifs de cette activité ? Que peut-on penser de la méthode proposée (et notamment l'utilisation d'un point mobile) ?
4) Quelles vont être, selon vous, les difficultés à surmonter pour les élèves tout au long de cette activité ?

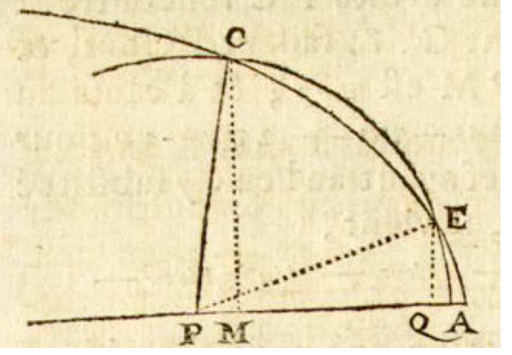
Ici, il s'agit d'un extrait de manuel de 1ère S avec une activité d'introduction relativement classique sur le nombre dérivé : une parabole, un point fixe A, un point mobile M, on rapproche M de A et on fait observer le phénomène sur la sécante (AM), puis calculer le coefficient directeur de la tangente définie comme position limite. Le questionnement consiste à demander quelles sont les difficultés prévisibles pour les élèves, la conception qu'ils risquent de développer sur la notion de limite et celle de tangente à une courbe. Les réponses apportées permettent de débattre des points suivants : la notion intuitive de la notion de limite sous-jacente, la notion de tangente comme un *a priori* supposé pour les élèves, le recours au mouvement… Le but étant de montrer à quel point ce type d'approche n'est pas naturel pour un élève et manque d'une problématisation, comme le suggèrent les programmes officiels.

Vient alors un deuxième temps du travail dirigé dans lequel les formés lisent et analysent quelques courts textes historiques que nous avons choisis afin d'apporter des réponses à la problématique d'enseignement initialement posée (cf. schéma de la méthodologie). Pour les aider dans leur travail de compréhension des textes, nous préparons un questionnement avec une phase d'appropriation puis une phase d'explicitation. La partie lecture de textes historiques se limite à un texte, voire deux si le temps le permet. Le premier est un extrait de *la Géométrie* de Descartes dans lequel il expose sa méthode des cercles tangents. Le second présente celle de Roberval qui est une méthode cinématique basée quant à elle sur les propriétés géométriques spécifiques de l'ellipse.

Partie B : « l'éclairage historique »

Document n°1 : un texte de Descartes.

Il s'agit d'un court extrait de la Géométrie de René Descartes (1637, livre II). Voici ci-dessous la figure que Descartes considère : CA est un arc de courbe d'axe PA, le cercle de centre P passant par C recoupe ici la courbe en un point E, les points M et Q sont les projetés orthogonaux respectifs des points C et E sur l'axe PA.
Descartes recherche le point P sur l'axe de la courbe de telle sorte que P soit le point d'intersection de l'axe avec la normale à la courbe en C. On précise que v = PA et s = PC.



Or aprés qu'on a trouué vne telle Equation, au lieu de s'en ſeruir pour connoiſtre les quantitez x, ou y, ou z, qui ſont déja données, puis que le point C eſt donné, on la doit employer à trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui eſt demandé. Et a cet effect il faut conſiderer, que ſi ce point P eſt tel qu'on le deſire, le cercle dont il ſera le centre, & qui paſſera par le point C, y touchera la ligne courbe CE, ſans la coupper : mais que ſi ce point P, eſt tant ſoit peu plus proche, ou plus éſloigné du point

A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe, non ſeulement au point C, mais auſſi neceſſairement en quelque autre. Puis il faut auſſi conſiderer, que lors que ce cercle couppe la ligne courbe CE, l'Equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre ſemblable, en ſuppoſant PA & PC eſtre connuës, contient neceſſairement deux racines, qui ſont inégales. Car par

[…]

nes ; & enfin elles ſont entierement égales, s'ils ſont tous deux ioins en vn ; c'eſt à dire ſi le cercle, qui paſſe par C, y touche la courbe CE ſans la coupper.

Questions :

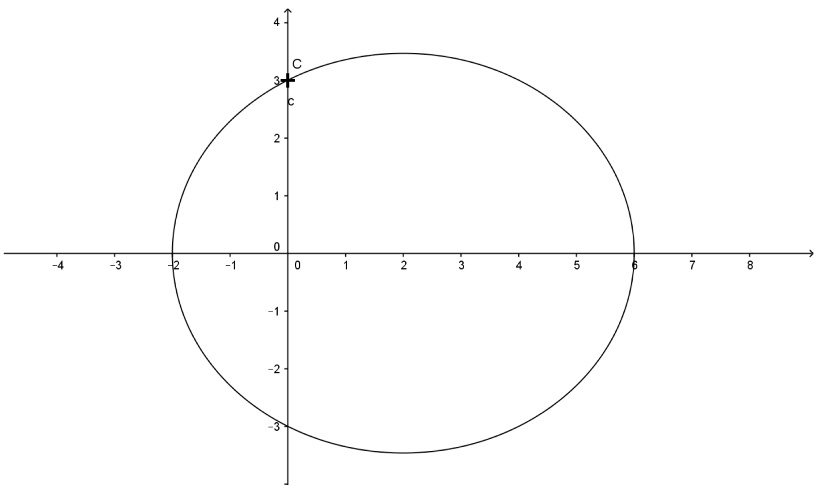
1) Expliquez la signification de la phrase : « le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE, sans la couper ». Que signifie « couper » la courbe pour Descartes ?

2) Dans la suite du texte, quelle propriété algébrique met-il en évidence lorsque le cercle de centre P passant par C « coupe » la courbe ?

3) A quelle équation Descartes fait-il référence lorsqu'il parle de « l'équation par laquelle on cherche x, ou y, ou quelque autre semblable » ? Combien de solutions doit posséder cette équation lorsque « le cercle qui passe par C y touche la courbe CE sans la couper » ?

4) Appliquer la méthode des cercles tangents de Descartes à la situation traitée dans le problème introductif :

Dans un repère orthonormé, on considère l'ellipse d'équation $3x^2 + 4y^2 - 12x = 36$. Le point C(0 ; 3) appartient à cette ellipse. Construire la tangente à l'ellipse au point C et déterminer P le point d'intersection de la normale en C avec l'axe des abscisses.

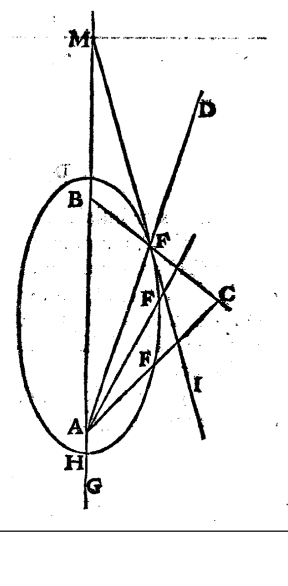


5) Proposer une méthode algébrique de détermination de la tangente à la parabole de la partie A qui ne soit pas la méthode des cercles tangents de Descartes.

Document n°2 : un texte de Roberval

Ce court texte est extrait du livre de Roberval intitulé *Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes* datant de 1693. Il s'intéresse à la recherche des « touchantes » à une ellipse de foyers A et B.

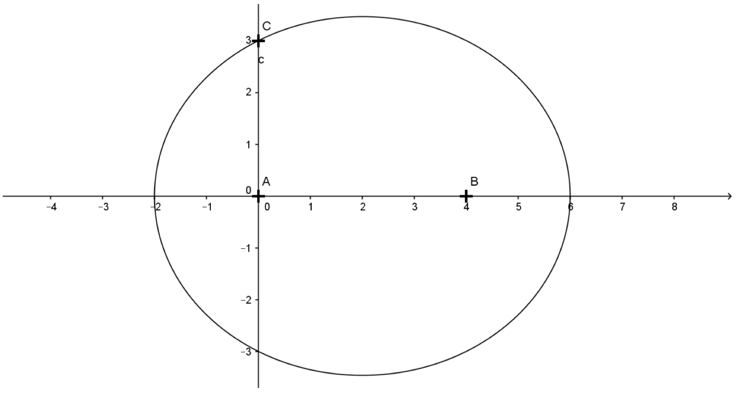
L'Ellipſe eſtant ainſi décrite, s'il faut tirer ſa touchante comme en F, ayant tiré les lignes B F C & A F D, ſoit que je conſidére les deux mouvemens du point F en B C & A D, ou comme s'éloignant de B dans F C, auquel cas il s'approche d'A dans F A, ou comme s'éloignant d'A dans F D, auquel cas il s'approche de B le long de F B, puiſque le point F s'éloigne autant de l'un des points A B, qu'il s'approche de l'autre, & que les directions de ces deux mouvemens ſont B F C & A F D, je n'ay qu'à diviſer l'un des deux angles A F C, ou B F D en deux également par la ligne I F M, elle ſera la touchante de l'Ellipſe.



Questions :

1) Quelle approche Roberval a-t-il de la courbe ? La comparer à l'approche de Descartes.

2) Comment Roberval construit-il la « touchante » à l'ellipse ?



3) Appliquer la méthode de Roberval à la situation traitée dans le problème introductif : construire la tangente à l'ellipse au point C où l'on précise que les foyers de l'ellipse sont les points A(0 ; 0) et B(4 ; 0).

Ces deux lectures ont pour but de montrer que les tangentes n'ont pas toujours été déterminées par dérivation. La recherche des tangentes à une courbe préoccupe les mathématiciens depuis l'Antiquité grecque : cette recherche est bien antérieure aux développements de l'analyse différentielle. Par ailleurs, ces textes montrent des approches alternatives, qui ne sont pas forcément plus simples, mais qui utilisent des outils plus élémentaires : l'algèbre ou la géométrie qui évitent toutes deux le recours à l'infini. Après un temps individuel de lecture et d'appropriation du texte de Descartes, une mise en commun permet de s'assurer que tous les stagiaires ont saisi la méthode des cercles tangents.

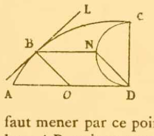
Le troisième temps de la séance (cf. schéma de la méthodologie) est un retour sur la situation déclenchante avec un nouveau regard, celui qui a été induit par la lecture des textes historiques précédents. Elle se fait ici de façon naturelle : les étudiants doivent appliquer la méthode cartésienne à la recherche de la normale en C à l'ellipse. Ils travaillent à deux et un étudiant vient présenter sa solution au groupe. Une animation avec un logiciel de géométrie dynamique permet de mieux visualiser la méthode cartésienne.

Enfin, le retour sur la problématique d'enseignement a lieu en reprenant l'extrait de manuel et en demandant aux étudiants de concevoir une méthode alternative à celle de l'activité : cette méthode doit être purement algébrique et, bien entendu, accessible pour des élèves (ce qui signifie qu'elle doit être différente de la méthode des cercles tangents de Descartes qui fait appel aux équations de cercles, notion abordée en première scientifique également mais sans doute pas de façon suffisamment précoce pour être mobilisable par les élèves au moment où la dérivation est généralement abordée). Un étudiant est alors sollicité pour présenter sa proposition.

Nous essayons enfin d'atteindre une conclusion plus générale sur la problématique d'enseignement (cf. schéma de la méthodologie) en expliquant les raisons profondes, cherchées dans l'histoire et l'épistémologie, qui rendent la notion particulièrement difficile à enseigner dans le cadre fixé par les programmes et qui invite les stagiaires à poursuivre la réflexion sur les objets enseignés et à envisager des modifications éventuelles dans leur pratique. En ce qui concerne la recherche des tangentes, il reste donc à leur expliquer pourquoi les méthodes algébriques ou géométriques ont été abandonnées au profit de méthodes infinitésimales. Pour cela, nous les mettons en présence d'un autre texte de Descartes, sa lettre à Mersenne du 23 août 1638, dans laquelle il cherche les tangentes à la roulette.

Document n°3 : une lettre de Descartes. Le texte ci-dessous est un extrait de la lettre adressée par Descartes à Mersenne, datée du 23 août 1638.

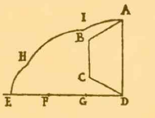
La premiere de ces queſtions eſt de trouuer les tangentes des courbes decrites par le mouuement d'vne roulete. A quoy ie reſpons que la ligne droite qui paſſe par le point de la courbe dont on veut trouuer la tangente, & par celuy de la baze* auquel touche la roulete pendant qu'elle le decrit, coupe touſiours cete tangente a angles droits. En ſorte que ſi on veut, par exemple, trouuer la ligne droite qui touche au point B la courbe ABC, deſcrite ſur la baze AD par l'vn des poins de la circonference de la roulete DNC, il faut mener par ce point B la ligne BN parallele a la baze AD, puis mener vne autre ligne du point N, ou cete parallele rencontre la roulete, vers le point D, ou cete roulete touche la baze, & apres cela mener BO parallele a ND, & enfin BL qui la rencontre a angles droits; car cete ligne BL eſt la tangente cherchée.



De quoy ie ne mettray icy qu'vne demonſtration qui eſt fort courte & fort ſimple. Si on fait rouler vn polygone | rectiligne, quel qu'il ſoit, ſur vne ligne droite, la courbe deſcrite par l'vn de ſes poins, quel qu'il ſoit, ſera compoſée de pluſieurs parties de cercles, & les tangentes de tous les poins de chaſcune de ces parties de cercles couperont a angles droits les lignes tirees de ces poins vers celuy auquel le polygone aura touché la baze en decriuant cete partie. En ſuite de quoy, conſiderant la roulete circulaire comme vn polygone qui a vne infinité de coſtez, on voit clairement qu'elle doit auoir cete meſme proprieté, c'eſt a dire que les tangentes de chaſcun des poins qui ſont en la courbe qu'elle decrit doiuent couper a angles droits les lignes tirées de ces poins vers ceux de la baze qui sont touchez par elle au meſme tems qu'elle les decrit.

1 de vos Geometres] d'entr'eux. — 3 auſſy bonne] meilleure. — 11 on] l'on. — 19 *après* parallele] BN *aj.* — roulete] DNC *aj.* — 23 icy *om.*

Ainſy, lorſqu'on fait rouler l'hexagone ABCD ſur la ligne droite EFGD, ſon point A deſcrit la ligne courbe EHIA, compoſée de l'arc EH, qu'il decrit pendant que cet hexagone touche la baze au point F qui eſt le centre de cet arc, de l'arc HI dont le centre eſt G, de l'arc IA dont le centre eſt D &c., par leſquels centres paſſent toutes les lignes qui rencontrent les tangentes de ces arcs a angles droits. Or le meſme arriue a vn polygone de cent mil milions de coſtez, & par conſequent auſſy au cercle. Ie pourrois demonſtrer cete tangente d'vne autre façon, plus belle a mon gré & plus Geometrique; mais ie l'obmets pour eſpargner la peine de l'eſcrire, a cauſe qu'elle feroit vn peu plus longue.



Questions :

1) Quel problème Descartes propose-t-il de résoudre dans ce texte ? Pourquoi n'applique-t-il pas sa méthode des cercles tangents pour déterminer la normale à la courbe ?

2) Commenter la phrase : « en suite de quoi, en considérant la roulette circulaire comme un polygone qui a une infinité de côtés, on voit clairement qu'elle doit avoir la même propriété ».

Quelle conception de la courbe cela sous-entend-il ?

3) Que suggère ce texte concernant les nouvelles méthodes que doivent développer les mathématiciens du XVII^{e} siècle pour la recherche des tangentes ?

Descartes a conscience qu'il ne peut appliquer sa méthode des cercles tangents car la cycloïde ne possède pas d'équation algébrique. Il doit lui-même se tourner vers une autre méthode dans laquelle il considère la courbe comme constituée d'une infinité de côtés… et mettre un pied dans l'infini. Ce que nous voulons que les étudiants stagiaires réalisent, c'est que les programmes nous invitent à introduire la notion de dérivée comme limite du taux de variation, donc par le recours à l'infiniment petit et la notion intuitive de limite, pour la recherche des tangentes alors que la notion de tangente n'est pas un *a priori* pour les élèves et que les courbes disponibles en classe de première ne sont que des courbes algébriques. Autrement dit, que l'outil « nombre dérivé » n'est, en réalité, pas le mieux adapté pour résoudre les problèmes qui se posent en classe de première, mais que cet apprentissage doit être initié à ce niveau de classe en prévision des fonctions non algébriques (logarithme, exponentielle, etc.) qu'ils rencontreront en classe de terminale et au-delà. Le recours à l'outil « dérivée » résulte donc d'une évolution historique en terme de complexité des courbes rencontrées et permet un changement de point de vue sur la courbe : on passe de la caractérisation d'une courbe par une équation algébrique à une caractérisation par une équation différentielle. C'est donc une raison qui, de fait, échappe nécessairement aux élèves et qui met le professeur dans une situation incommode. Nous mettons ainsi en lumière certaines des causes qui peuvent expliquer pourquoi « l'introduction des tangentes et du nombre dérivé en classe de première scientifique » constitue une problématique d'enseignement.

Quelques éléments d'évaluation de la formation

Le premier constat que nous tirons de cette expérience de formation est l'intérêt global des stagiaires pour ce qui leur a été proposé et l'investissement de tous dans les différents moments de la séance. Le problème introductif a produit l'effet escompté. Nous avons pu constater que notre hypothèse s'avérait exacte. Tous ont résolu le problème de la recherche de la normale à l'ellipse par le biais d'une fonction numérique et d'un calcul de dérivée. Autrement dit, ils ont tous utilisé des connaissances et des méthodes datant du secondaire (précisément celles qu'ils ont ou auront à enseigner) pour répondre à la question mathématique. Nous pouvons nous en étonner d'une certaine façon, puisque leurs études supérieures leur ont permis d'acquérir des méthodes encore plus performantes comme l'usage des formes différentielles et des dérivées partielles.

Si les stagiaires se sont engagés dans les différentes tâches et ont maintenu leur activité tout au long de la séance, c'est sans doute par la diversité des points d'accroche : l'entrée par un problème mathématique s'avère très efficace, car elle suscite le plaisir de l'activité mathématique. La question épistémologique soulevée par la définition d'une tangente à une courbe dans les parties A et B de l'activité entretient l'intérêt des formés : l'histoire montre que la définition d'une tangente est liée à la définition même de courbe et que cette notion a évolué au cours du temps, en fonction des mathématiques pratiquées mais également des besoins des mathématiciens. La façon dont les Grecs considéraient les courbes dans l'Antiquité n'est pas celle de Descartes, qui n'est pas non plus celle de Roberval ni de Fermat, etc. Enfin, malgré les difficultés de compréhension du fond du texte, le contact avec l'extrait de *La Géométrie* de Descartes attise la curiosité dans la mesure où l'orthographe et la typographie étonnent, mais aussi parce que les notations et les expressions mathématiques interrogent. Ces différentes stratégies pour agir sur la motivation des formés peuvent accroître leur potentiel d'apprentissage et permettre de mieux délivrer le message sous-jacent de la formation.

Les formateurs ont la charge d'orchestrer les différents temps du travail dirigé mais aussi d'organiser le fameux *dépaysement* : on voit ici l'importance de dégager à l'avance les noyaux conceptuels et d'accompagner les formés dans leur « étonnement » afin d'alimenter leur réflexion. Au niveau de la vigilance historique, ils doivent faire évoluer leur conception d'une tangente à une courbe (à savoir la droite passant par le point de la courbe d'abscisse a et de coefficient directeur $f'(a)$ comme cela leur a été probablement enseigné un jour) puisque cette notion a évolué au cours du temps. En terme de contextualisation, ils doivent comprendre les raisons qui ont poussé un mathématicien comme Descartes à s'intéresser aux tangentes (alors que de nombreux résultats sur ces dernières étaient connus dès l'Antiquité). La première raison qui motive les mathématiciens du XVII^e siècle à s'intéresser aux courbes et aux tangentes est une raison épistémologique et purement interne aux mathématiques : ils cherchent à mettre au point des méthodes d'invention qui permettent de résoudre de façon directe les problèmes, en réaction aux mathématiques axiomatico-deductives grecques dans lesquelles les théorèmes sont énoncés puis démontrés (souvent par l'absurde), sans que l'on sache comment ils ont été trouvés. La seconde raison est purement pratique : les courbes deviennent, par la nature des problèmes envisagés à l'époque, les solutions de problèmes tirés d'autres disciplines : Galilée recherche la trajectoire d'un boulet de canon pour déterminer la portée d'un canon selon l'angle d'inclinaison dans un problème d'artillerie, Descartes s'intéresse à la forme d'un dioptre pour obtenir un effet optique, Huygens souhaite trouver la forme d'une lame réalisant un pendule isochrone en horlogerie… Dans ces contextes, les courbes apparaissent comme la mesure d'un effet physique et les tangentes ne sont plus uniquement des objets géométriques figés, mais se chargent de nouvelles significations : elles servent à mesurer des vitesses, des directions, des réfractions, etc.. Cette contextualisation est essentielle au cours de la formation car elle permet d'établir un lien avec le prescrit : les programmes officiels encouragent en effet, comme nous l'avons rappelé, à introduire les notions dans le cadre de la résolution de problèmes (tantôt tirés d'autres disciplines, tantôt intrinsèques aux mathématiques). La fonction de l'histoire et de l'épistémologie ici est d'accompagner les nouveaux professeurs, qui ont du mal à mettre en œuvre ces injonctions (et oublient bien souvent de donner du sens aux notions qu'ils enseignent), en leur montrant qu'elles sont le reflet même de l'évolution des mathématiques et relèvent du processus de création des notions.

Au cours de la partie B du travail proposé aux stagiaires, nous cherchons à vérifier si la méthode cartésienne a été correctement comprise puisque nous leur demandons de reproduire cette méthode (avec les notations et les outils modernes) sur le problème introductif de la normale à l'ellipse. Quelques étudiants éprouvent des difficultés d'ordre mathématique, mais un certain nombre d'entre eux parvient à déterminer l'équation permettant de résoudre le problème. Enfin, dans cette partie B toujours, nous les invitons à réfléchir à une stratégie alternative pour la recherche d'une tangente à une parabole (en reprenant l'exercice commenté au niveau didactique dans la partie A). C'est à ce moment qu'ils doivent « déconstruire » la façon experte qu'ils utilisent pour déterminer des tangentes afin de mieux réaliser les efforts demandés aux élèves lorsqu'on les prive de l'outil algébrique et qu'on leur impose une méthode analytique qui n'a rien de naturelle. D'une certaine façon, nous cherchons à leur faire suivre le chemin qu'un élève pourrait spontanément emprunter avec les connaissances dont il dispose : la recherche de la tangente peut s'effectuer avec succès en mobilisant les notions d'équations de droite et de parabole et des connaissances élémentaires sur la résolution des équations du second degré.

La partie conclusive permet d'insister sur le fait que la notion de tangence géométrique peut être conçue avant la notion de limite comme l'atteste l'histoire et d'expliquer pourquoi la méthode algébrique cartésienne ne pouvait s'imposer par manque de généralité et devait céder la place à des méthodes infinitésimales.

Si le bilan de la formation s'avère globalement positif et conforme aux attentes, il présente un écueil majeur : celui de l'inscription dans la durée. D'une part les étudiants fonctionnaires stagiaires n'ont pas nécessairement de classe de 1$^{\text{ère}}$ scientifique (en pratique, très rarement) dans laquelle ils pourraient mettre à profit les réflexions suscitées par notre formation. D'autre part, les effets à plus long terme nous échappent également dans la mesure où la majorité d'entre eux quittent l'académie ce qui rend le suivi impossible. Nous espérons en revanche que cette introduction d'un éclairage historique les aura au moins sensibilisés à la question du sens des notions enseignées et les encouragera à s'investir dans un parcours personnel de formation.

Conclusion

Considérant que des notions mathématiques mal construites peuvent s'avérer plus difficiles à enseigner, nous espérons avoir montré comment l'histoire et l'épistémologie peuvent constituer un outil efficace dans le cadre de formations (initiale ou continue).

Dans le travail de recherche présenté ici, nous avons pointé deux effets essentiels de l'introduction d'une perspective historique dans la formation : le premier est de jouer le rôle de levier au niveau de la motivation et de l'engagement des stagiaires, même si le recours à des textes anciens peut s'avérer un frein compte tenu de certaines difficultés d'appropriation. Le deuxième effet est de permettre la mise en lumière des difficultés incontournables du professeur pour réaliser le nécessaire compromis entre les injonctions des programmes officiels et les attentes des élèves. Non seulement, la perspective historique met en exergue ce conflit, mais elle en explique certaines des causes. Enfin, elle peut également, ce qui est notre conviction, les résoudre en partie. En effet, concernant la recherche des tangentes en classe de première, nous avons mis en évidence certaines difficultés pour l'enseignant : cette recherche se fait en imposant aux élèves une nouvelle méthode faisant appel au mouvement et à l'infiniment petit (notion dite « intuitive » de limite), alors que les courbes et les fonctions dont ils disposent à ce niveau d'étude se prêteraient très bien à une détermination algébrique qui leur serait plus naturelle et historiquement cohérente. À ce stade de leur scolarité, les élèves ne peuvent imaginer que ce type de méthode ne puisse pas être générale et s'appliquer à toutes les courbes. Or, c'est précisément cette raison qui justifie le recours à la dérivation. Il apparaît également que l'idée de tangence nécessiterait d'être préalablement mieux construite au niveau géométrique.

Pour parvenir à ses fins, le formateur doit orchestrer le *dépaysement* que l'introduction de la perspective historique provoque. Plus qu'un expert en histoire et épistémologie qui délivrerait des masses de connaissances, il se doit plutôt de fournir des ressources, d'organiser la réflexion et de susciter le questionnement chez les formés en tenant compte du public concerné : l'effort des étudiants fonctionnaires stagiaires doit porter sur la transition des savoirs savants fraîchement recueillis dans leurs études en des savoirs à enseigner (d'où la nécessité de faire émerger les représentations initiales à titre préliminaire), tandis que les professeurs titulaires doivent analyser des pratiques déjà en place et des habitudes (d'où la nécessité d'une enquête de terrain préalable). Dans les deux cas, la réflexion historique et épistémologique doit permettre d'établir de nouveaux compromis entre le prescrit et le travail en classe. Dans la méthodologie que nous nous efforçons de suivre pour concevoir nos formations, l'histoire et l'épistémologie apparaissent elles-mêmes comme réponses à un problème, une « problématique d'enseignement ». Il convient donc de bien cerner ce problème, grâce à une situation déclenchante ou une analyse didactique suffisamment riche, puis de proposer des pistes de résolution par le biais notamment de la lecture et l'analyse de textes anciens. Autrement dit, la formation doit procéder du même esprit qu'un cours de mathématiques : par le biais de la résolution de problème. Ainsi, la force de l'action de formation réside davantage dans l'identification des problèmes et dans la réflexion suscitée que dans la diffusion des solutions.

Bibliographie

BARBIN Évelyne (dir.), *De grands défis mathématiques, D'Euclide à Condorcet*, Paris, Vuibert Adapt-Snes, 2010.

BARBIN Évelyne (dir.), *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris, Vuibert Adapt-Snes, 2012.

BARBIN Évelyne, « Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement », *Tréma*, n°26, IUFM de Montpellier, 2006, p. 21-28.

BARBIN Évelyne, « Épistémologie et histoire dans la formation mathématique », *Repères IREM*, n°80, 2010, p. 74-86.

BARBIN Évelyne, « Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique », *Repères IREM*, n°27, 1997, p. 63-80.

BARBIN Évelyne, *La révolution mathématique du XVIIe siècle*, Paris, Ellipses, 2006.

BARBIN Évelyne, JANKVIST Uffe Thomas et KJELDSEN Tinne Hoff (dir.), *Proceedings of the Seventh European Summer University of History and Epistemology in Mathematics Education (ESU 7)*, Aarhus, Danish School of Education, 2015.

BASSIS Odette, « Vers une transformation de la formation. La professionnalisation des enseignants », GFEN, 2012 [disponible en ligne sur le site http://www.gfen.asso.fr, dernière consultation le 04/01/16].

BKOUCHE Rudolf, « Épistémologie, histoire et enseignement des mathématiques », *For the learning of mathematics*, n°17, 1997, p. 34-42.

BKOUCHE Rudolf, « L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique », *Repères IREM*, n°9, 1992, p. 6-14.

BKOUCHE Rudolf, « Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science », *Repères IREM*, n°39, 2000, p. 35-39.

BOYER Carl Benjamin, *A history of mathematics*, New-York, Wiley and Sons, 1968.

DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Paris, Seuil, 1986.

DE VITTORI Thomas, LOEUILLE Hervé, « Former des enseignants à l'histoire des sciences: analyse et enjeux d'une pratique en mathématiques », *Petit x*, n°80, IREM de Grenoble, 2009, p. 5-22.

DELEDICQ André, *Descartes La Géométrie*, Les Classiques Kangourou, Paris, Les éditions du Kangourou, 2009.

DESCARTES René, *La Géométrie*, Paris, Charles Angot, 1664.

ESCOFIER Jean-Pierre, *Histoire des mathématiques*, Paris, Dunod, 2008.

FERMAT Pierre, *Œuvres mathématiques*, Toulouse, Imprimerie de Jean-Matthieu Douladoure, 1853.

Groupe d'étude INRP/CII Didactique AMPERES, « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire par la mise en place de séquences d'enseignement organisées autour d'activités d'étude et de recherche (AER) ou de parcours d'étude et de recherche (PER) », IREM de Clermont-Ferrand, 2009.

HOUZEL Christian, « Histoire des mathématiques et enseignement des mathématiques », *Histoire des mathématiques et épistémologie*, Bulletin inter IREM n°18, 1979, p. 3-6.

IREM de Paris, « Autour de la notion de dérivée en classe de première scientifique », *Brochure IREM*, n°97, 2015.

Manuel de mathématiques 1$^{\text{ère}}$ S, Collection Indice, Paris, Bordas, 2015.

Ministère de l'Éducation Nationale, arrêté du 1$^{\text{er}}$ juillet 2013 relatif au référentiel de compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation (BOEN du 25 juillet 2013).

Ministère de l'Éducation Nationale, programme officiel du cycle terminal de série scientifique, bulletin officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010.

MOYON Marc, « Penser les mathématiques à travers leur épistémologie et leur histoire : un enjeu de/dans la formation des maîtres », in Jean-Luc Dorier, Sylvia Coutat (dir.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21$^{\text{ème}}$ siècle*, Actes du colloque EMF, 2012, p. 641-652.

RADFORD Luis, FURINGHETTI Fulvia et HAUSBERGER Thomas (dir.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the Internationl Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, Montpellier, IREM de Montpellier, 2016.

ROVERVAL Gilles Personne de, *Divers ouvrages de M. de Roberval*, 1693.

TOURNÈS Dominique, « Place de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants du secondaire », *Expressions*, n°3, 1993, p. 145-159.

VILLANI Cédric et TOROSSIAN Charles, *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*, février 2018.

Éléments de réponses

Partie A

1) a) Les auteurs s'appuient sur la figure géométrique et le mouvement pour construire une idée intuitive de la limite. Il s'agit d'un point mobile se rapprochant d'un autre.

b) Cette approche géométrique conduit parallèlement à une approche calculatoire de la limite. Ici il s'agit de trouver la limite d'un taux de variation, autrement dit du coefficient directeur d'une sécante à la courbe. Les élèves risquent naturellement de penser que la limite s'obtient en donnant à h la valeur 0.

2) La question 3c invite les élèves, par zooms successifs, à constater que la courbe et la tangente se confondent au voisinage du point étudié. On peut alors penser que la tangente et la courbe ont plusieurs points communs. Au collège (avant la réforme de 2016), les élèves entendent parler de tangente lorsqu'ils étudient le cercle. Or, la tangente à un cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire au rayon en un point du cercle, est alors envisagée comme une droite n'ayant qu'un seul point d'intersection avec le cercle. Ces deux conceptions d'une tangente sont avérées dans l'histoire, mais il n'est pas forcément simple de faire admettre l'une ou l'autre aux élèves, puisque précisément la droite et le cercle semblent confondues au voisinage d'un point.

3) L'objectif de l'activité est l'introduction de la tangente à une courbe ainsi que du nombre dérivé à une fonction comme coefficient directeur de celle-ci (elle-même obtenue comme position limite d'une sécante). La méthode, malgré son caractère classique, peut engendrer de multiples difficultés pour les élèves dans la mesure où son but n'est pas explicité et qu'elle conduit à des changements de cadre incessants (géométrique, numérique, algébrique…). De plus la phase de démonstration précède la phase d'observation qui aurait pu permettre de conjecturer le résultat et de mieux poser le problème.

4) Les principales difficultés que peuvent rencontrer les élèves :

— la première difficulté est le recours au mouvement. La géométrie telle qu'elle est enseignée actuellement laisse peu de place au mouvement (absence d'étude approfondie des transformations planes). Le recours à des points mobiles n'est pas fréquent.

— la seconde difficulté est de se demander pourquoi faire tout cela ? Pourquoi faire bouger un point vers un autre fixe, autrement dit, le manque de clarté sur la finalité de l'activité.

— une troisième difficulté concerne la conception de la tangente à une courbe. Non seulement l'activité ne clarifie pas les deux visions de la tangence évoquées plus haut, mais conduit plutôt à définir la tangente à la courbe comme étant la droite passant par le point fixe A et de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$, autrement dit, elle prive tout a priori géométrique de la notion de tangente.

— les difficultés calculatoires ne sont pas à négliger non plus : calcul du taux de variation (avec simplification par h non justifiée), puis recherche d'une limite de « façon intuitive » !

Partie B

Document n°1

1) Pour Descartes, un cercle *coupe* la courbe lorsqu'il possède deux points d'intersection distincts avec

elle. Il *touche la courbe sans la couper* lorsqu'il est tangent avec elle, donc lorsque le point d'intersection est unique, ou, d'une autre façon, lorsque les deux points d'intersection sont confondus.

2) Lorsque le cercle coupe la courbe, une certaine équation possède deux solutions inégales.

3) Si le point C est connu, ses « coordonnées » PA et PC sont connues. Elles vérifient l'équation de la courbe. Mais comme il est sur le cercle de centre P elles vérifient également l'équation du cercle. Pour déterminer les intersections entre le cercle et la courbe, on forme donc une nouvelle équation à partir de chacune des équations les caractérisant. Cette équation doit permettre de trouver les coordonnées x et y des deux points d'intersection (puisque ici le cercle coupe la courbe au sens de Descartes), notamment du deuxième E inconnu.

Lorsque le cercle touche la courbe sans la couper, cette équation doit posséder une racine double, ce qui permet de déterminer complètement le point P.
4) Soit P(p ; 0) un point de l'axe de l'ellipse. Le cercle de centre P passant par C a pour équation cartésienne : $(x-p)^2 + y^2 = 3^2 + p^2$. Les coordonnées ($x$; y) des points d'intersection de ce cercle avec l'ellipse vérifient le système : $\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 - 12x = 36 \\ (x-p)^2 + y^2 = 3^2 + p^2 \end{cases}$ Donc, par exemple, x vérifie :

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4(9 + p^2 - (x-p)^2) - 12x &= 36 \\ 3x^2 + 4(9 + p^2 - x^2 + 2px - p^2) - 12x &= 36 \\ -x^2 + (8p - 12)x &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation doit posséder une racine double dans le cas où le cercle est tangent à l'ellipse. Cette racine double doit être égale à $\dfrac{-8p+12}{-2} = 4p-6$. Mais, le point de tangence C étant connu, on sait que cette racine double vaut 0. Ainsi, $4p - 6 = 0$ ce qui donne $p = \dfrac{3}{2}$.

Autre méthode : $-x^2 + (8p-12)x = 0 \iff x(-x + 8p - 12) = 0$, donc pour que $x = 0$ soit racine double, il faut et il suffit que $8p - 12 = 0$, donc que $p = \dfrac{3}{2}$. On peut donc placer le point P, tracer la normale à l'ellipse en C (de coefficient directeur –2) puis la tangente ; qui aura pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

5) En reprenant la démarche algébrique de Descartes, on peut déterminer la tangente à la parabole de la partie A en considérant le système : $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = mx + p \end{cases}$.

Donc, par exemple, x vérifie : $x^2 - 3 = mx + p \iff x^2 - mx - (p+3) = 0$.

Cette équation doit avoir une racine double égale à 1 donc $\dfrac{m}{2} = 1$, soit $m = 2$.

Remarques : La méthode de Descartes est algébrique, elle s'appuie sur le fait que chaque courbe pour Descartes est caractérisée par une équation. Elle conduit à raisonner sur le degré de l'équation obtenue par combinaison des équations des deux courbes et sur le fait que cette équation doit posséder une racine double connue à l'avance. Par ailleurs, la conception de la tangente chez Descartes est celle d'une droite ne coupant la courbe localement qu'en un seul point. Si l'équation obtenue est de degré 3, il doit y avoir deux solutions.

Document n°2

1) L'approche de Roberval est cinématique, autrement dit l'ellipse est vue comme la trajectoire d'un point mobile, alors que l'approche de Descartes est algébrique.

2) La construction de la « touchante » chez Roberval est géométrique, il s'agit de la bissectrice d'un angle, composante des deux mouvements dont le point mobile décrivant l'ellipse fait l'objet.

3) Pour construire la tangente en C, il suffit dès lors de construire la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Plus précisément : Roberval construit l'ellipse point par point comme une intersection de deux cercles de centre respectif les foyers. Le mouvement d'un point F situé sur l'ellipse est donc le « mouvement composé » de deux mouvements circulaires. Les directions des mouvements circulaires étant les tangentes en F à chaque cercle (1er axiome), il suffit de les composer grâce à la règle du parallélogramme. Cette règle dit que « si un mobile est porté par deux divers mouvements chacun droit et uniforme, le mouvement composé de ces deux sera un mouvement droit et uniforme différent de chacun d'eux, mais toutefois en même plan, en sorte que la ligne droite que décrira le mobile sera le diamètre d'un parallélogramme, les côtes duquel seront entre eux comme les vitesses de ces deux mouvements, et la vitesse du composé sera à chacun des composants comme le diamètre à chacun des côtés ». C'est pour cette raison que Roberval trace les bissectrices intérieures et extérieures de l'angle formé en reliant le point aux foyers : la direction du mouvement composé est la diagonale d'un losange ici, les vitesses des mouvements autour des foyers étant les mêmes.

Document n°3

1) Dans ce texte, Descartes propose de déterminer la tangente en un point d'une cycloïde (ou roulette). Il n'emploie pas sa méthode des cercles tangents car la cycloïde ne possède pas d'équation algébrique !

2) Dans cette phrase, Descartes voit une ligne curviligne comme un polygone ayant une infinité de côtés. Par exemple, un cercle est un polygone dont les côtés sont des segments de longueur infiniment petite. Descartes effectue une sorte de « passage à la limite ».

3) Ce texte montre les limites de la méthode cartésienne des cercles tangents, et plus généralement des méthodes algébriques. De nouvelles courbes n'ayant pas d'équation algébrique sont apparues, ce qui rend inopérantes ces méthodes. Les mathématiciens doivent donc envisager de nouvelles méthodes qui font intervenir des infiniment petits, les méthodes infinitésimales.

Ces méthodes se développent à la suite du travail de Fermat. Deux formes abouties apparaissent de façon indépendante et simultanée au cours du XVIIe siècle, celle de Leibniz et celle de Newton.