Rallye Mathématique d'Auvergne 2021

24e édition

Corrigé des épreuves qualificatives

Du mardi 9 mars 2021

Durée : 2 h – Niveaux : 3e et 2de

ORGANISATEURS

Académie de Clermont-Ferrand
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Clermont-Ferrand
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

PARTENAIRES

Volvic, Cruzilles, le Conseil général du Cantal, les villes de Saint-Flour et de Cournon d'Auvergne, l'Université Clermont Auvergne, le Centre National de la Recherche Scientifique, le Comité International du Jeux Mathématique, Texas Instruments et Numworks.

Conception et rédaction : IREM, APMEP

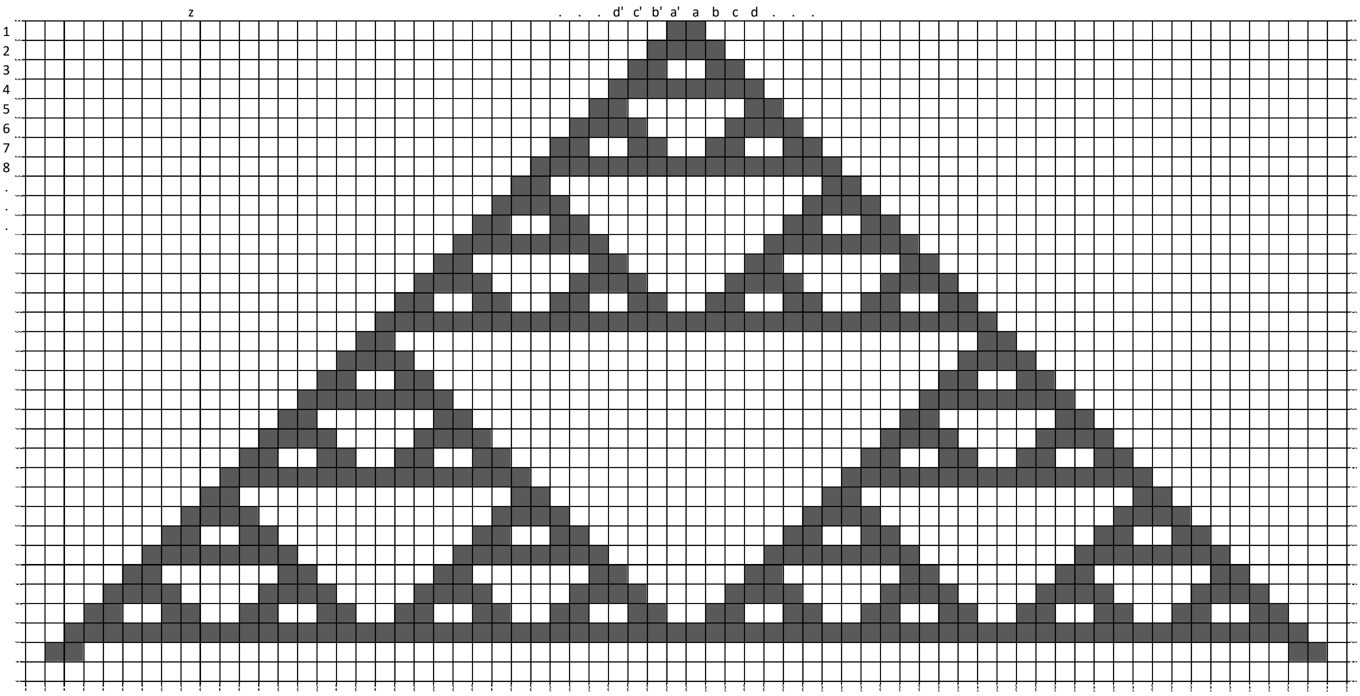
Contact : rallye.mathematique@ac-clermont.fr

Problème 1

DESSIN PROCEDURAL

NIVEAU 1

Question 1 :



Note : il était possible de produire cette figure à la main ou à l'aide d'un tableur en notant les cases noires par des 1 et les blanches par des cases vides :

- on rentre manuellement les valeurs pour la première ligne ;
- on écrit, en B2 la formule `=SI(ET(A1=B1;B1=C1);" ";1)` et on l'étire dans tout le tableau.

Question 2 :

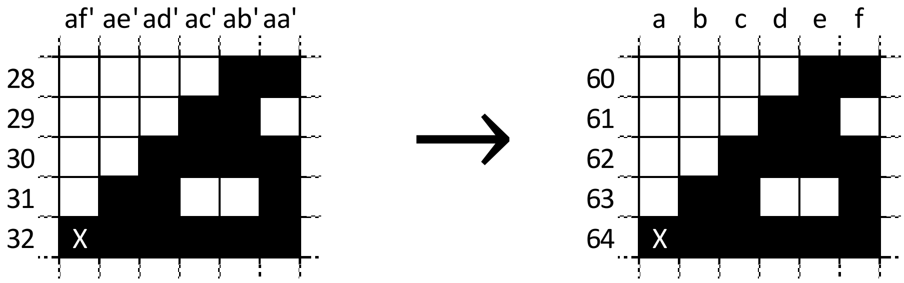
Il est possible de faire plusieurs observations à partir du dessin ci-dessus :
- le motif est symétrique selon un axe vertical séparant les colonnes a et a' ;
- le motif se construit de façon « triangulaire » et reste toujours confiné entre les diagonales (a'1-b'2-c'3-d'4-…) à gauche et (a1-b2-c3-d4-…) à droite.

L'observation importante c'est que, certaines lignes sont « complètement » noires, dans le sens où, d'une diagonale à l'autre, toutes les cases sont noires. Il s'agit des lignes 1, 2, 4, 8, 16 et 32. Il est alors facile de conjecturer que ce phénomène se produit sur les lignes n° 2^n.

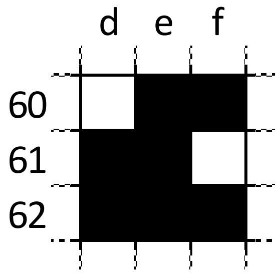
Sur les lignes n° $(2^n + 1)$, apparaissent alors deux duos de cases noires accolées aux « extrémités » de la ligne 2^n précédente. Chacun de ses duos va alors reproduire sous lui le même schéma qu'à partir de la ligne 1 jusqu'à atteindre la ligne n° 2^{n+1} qui sera de nouveau une ligne « toute noire ».

Autrement dit, après chaque ligne dont le numéro est une puissance de 2, le motif déjà tracé au-dessus se répète en deux exemplaires jusqu'à la prochaine puissance de 2.

Les lignes n° 60, 61 et 62 qui nous intéressent se trouvent juste au-dessus de la ligne 64, qui, d'après nos observations est « toute noire » puisque $64 = 2^6$. Au-dessus d'elle, on doit retrouver, de chaque côté de l'axe séparant les colonnes a et a' le même motif qu'au-dessus de la ligne n° 32 en deux exemplaires. En particulier, la cellule a64 correspond à la cellule af'32. De « proche en proche », on en déduit les couleurs des cases demandées :



Et donc :

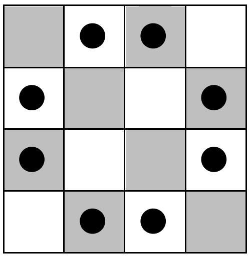


Problème 2

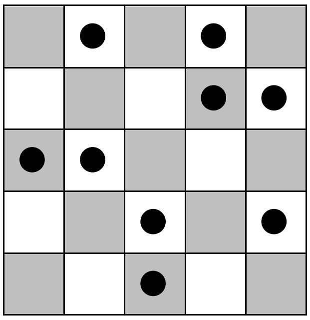
TERRIBLES ECHIQUIERS

NIVEAU 1

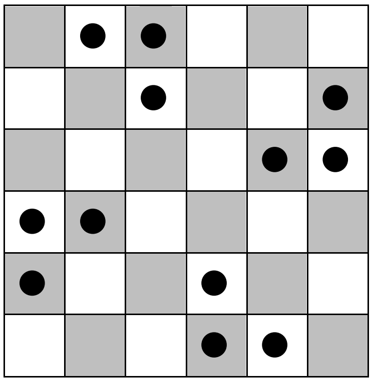
Question a :



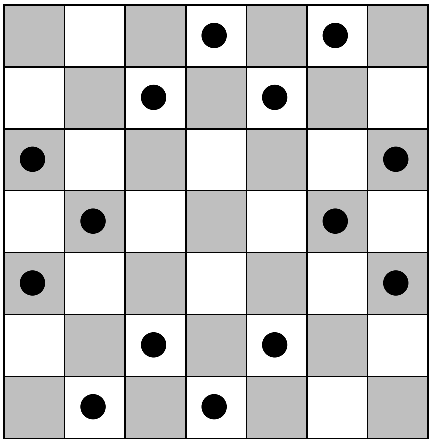
Question b :



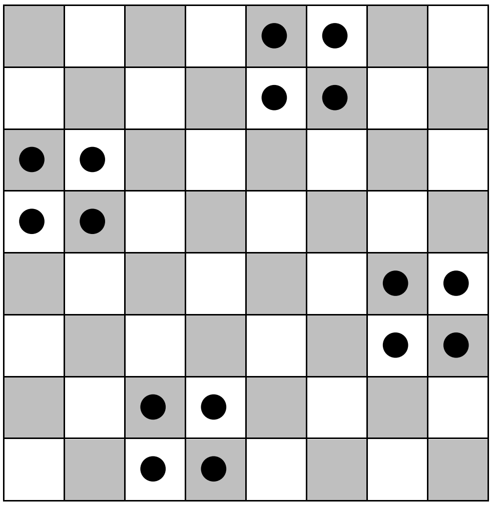
Question c :



Question d :



Question e :



Note : il ne s'agit que de quelques solutions. Comptées [1] avec leurs « symétriques [2] » :

- la question « 8 pions sur 4 × 4 » possède 11 solutions ;
- la question « 10 pions sur 5 × 5 » possède 32 solutions ;
- la question « 12 pions sur 6 × 6 » possède 50 solutions ;
- la question « 14 pions sur 7 × 7 » possède 132 solutions ;
- la question « 16 pions sur 8 × 8 » possède 380 solutions …

1 : d'après un algorithme mis au point par l'équipe du Rallye. Nous n'avons pas démontré que cet algo est exhaustif mais en avons une forte conviction. N'hésitez pas à nous le demander par mail.

2 : on parle de « symétrique » au sens large : image de symétrie axiale ou centrale et rotation.

Problème 3

ALEALGO

NIVEAU 2

La valeur de X avant son passage dans la boucle est la somme de deux nombres aléatoires entiers compris entre 1 et 5. C'est donc un nombre compris entre 2 et 10. Plus précisément, le tableau suivant nous donne les 9 valeurs de départ de X selon les valeurs de A et de B :

		A				
		1	2	3	4	5
B	1	2	3	4	5	6
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10

On peut donc associer à chaque valeur possible de X avant sa boucle sa probabilité :

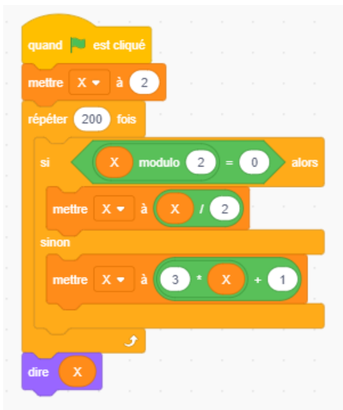
valeur de X avant la boucle	2	3	4	5	6	7	8	9	10
probabilité	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$

Pour connaître les différentes valeurs possibles de X à la fin du programme et les probabilités de chacun, il suffit alors de déterminer la valeur obtenue pour chacune des 9 valeurs de X avant la boucle.

Nous proposons deux méthodes :

1ère méthode : on peut utiliser un ordinateur et modifier le programme afin de tester la boucle pour chacune de ces valeurs.

Avec Scratch par exemple, cela donne l'algorithme ci-contre, ici utilisé pour la valeur $X = 2$.



2e méthode : On peut aussi trouver ces résultats par raisonnement « à la main » en appliquant soit même l'algorithme.

Pour le nombre 3, par exemple :

3 est impair, donc au premier passage, on obtient : $3 \times 3 + 1 = 10$

→ 10 est pair, donc au deuxième passage, on obtient : $10 \div 2 = 5$

→ 5 est impair, donc au troisième passage, on obtient : $5 \times 3 + 1 = 16$

→ 16 est pair, donc au quatrième passage, on obtient : $16 \div 2 = 8$

→ 8 est pair, donc au cinquième passage, on obtient : $8 \div 2 = 4$

→ 4 est pair, donc au sixième passage, on obtient : $4 \div 2 = 2$

→ 2 est pair, donc au septième passage, on obtient : $2 \div 2 = 1$

→ 1 est impair, donc au huitième passage, on obtient : $1 \times 3 + 1 = 4$

… et à partir de là, il n'est plus nécessaire de poursuivre à la main puisque nous revenons à la situation d'après le 5^{e} passage. A partir de là, l'algorithme « tourne en rond » sur 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc..

Ainsi, après le 7^{e} passage (il reste 193 passages à effectuer), on obtient 1 et à chaque fois qu'on passera 3 fois dans la boucle, on obtiendra 1 de nouveau. Par la division euclidienne de 193 par 3 : $193 = 64 \times 3 + 1$ on peut donc dire qu'après les 7 premiers passages, on passe 64 fois par la séquence 4 – 2 – 1, et qu'il reste ensuite un dernier passage. Après ce dernier passage, on obtient 4.

Donc, si X vaut 3 avant de rentrer dans les boucles, après 200 passages, X vaudra 4.

Pour les autres valeurs possibles de X au départ :

Pour 2	On obtient la séquence 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1 …
Pour 3	*Rappel :* On obtient la séquence 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 4	On obtient la séquence 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 5	On obtient la séquence 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 6	On obtient la séquence 6 – 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 7	On obtient la séquence 7 – 22 – 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 8	On obtient la séquence 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 9	On obtient la séquence 9 – 28 – 14 – 7 – 22 – 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …
Pour 10	On obtient la séquence 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – $\boxed{\mathbf{1}}$ – 4 – 2 – 1 …

Quel que soit le nombre de départ, on constate que l'algorithme finit toujours en bouclant sur la séquence 4 – 2 – 1.

Il suffit alors de mener à nouveau le raisonnement précédent en comptant le nombre de passage qu'il reste à effectuer après le premier $\boxed{\mathbf{1}}$ et en calculant le reste de la division euclidienne de ce nombre par 3.

On obtient alors, par l'une des deux méthodes, les résultats suivants (en reprenant le tableau ci-dessus) :

valeur de X avant la boucle	2	3	4	5	6	7	8	9	10
probabilité	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$
valeur de X après la boucle	4	4	1	1	1	4	2	4	2

Ainsi, il existe <u>3 valeurs possibles</u> de X à la fin du programme : <u>1, 2 ou 4</u>.

Pour déterminer la probabilité de chacune de ces 3 valeurs, il suffit d'additionner les probabilités d'apparition des valeurs de X avant la boucle menant à ces valeurs finales. Et finalement :

$$\mathbb{P}(1)=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}+\frac{5}{25}=\frac{12}{25}$$

$$\mathbb{P}(2)=\frac{3}{25}+\frac{1}{25}=\frac{4}{25}$$

$$\mathbb{P}(4)=\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{4}{25}+\frac{2}{25}=\frac{9}{25}$$

Problème 4

CHIFFRES CODES

NIVEAU 2

On s'intéresse à la phrase « *formé il y a ℧Ø ans en ƻʢѪ₪* ». Le nombre ℧Ø est nécessairement compris entre 10 et 98. Etant en 2021, on en déduit que le groupe a été formé entre 1923 et 2011. Or, tous les nombres entre 2000 et 2011 ont au moins un chiffre répété ce qui n'est pas le cas de ƻʢѪ₪. Donc, le nombre ƻʢѪ₪ est compris entre 1923 et 1999 (inclus). Ca ne laisse pas le choix pour les chiffres des milliers et des centaines : $\boxed{ƻ = 1}$ et $\boxed{ʢ = 9}$.

Ensuite, dans la dernière date mentionnée (ѪꝒ/Ꝓ℧/ƻʢ₪◬) :

- le symbole Ꝓ est le chiffre des dizaines du mois et ne peut être que 0 ou 1 ;
- le symbole Ѫ est le chiffre des dizaines du jour et ne peut être que 0, 1, 2 ou 3.

Le chiffre 1 étant déjà pris, on conclut que $\boxed{Ꝓ = 0}$ et que Ѫ ∈ {2 ; 3}.

Prenons la première année à quatre chiffres du texte ƻʢѪ₪ (année de formation du groupe) ainsi que la deuxième ƻʢ◬Ѫ (« *ƻ◬ ans avant la formation du groupe* »). D'après le texte, ƻʢ◬Ѫ est postérieur à ƻʢѪ₪. Donc 19◬Ѫ < 19Ѫ₪ et on observant les chiffres des dizaines, on déduit que ◬ < Ѫ.

Or, puisque 0 et 1 sont déjà attribués, 2 ≤ ◬ et on avait déjà établi que Ѫ ∈ {2 ; 3}.

On peut donc écrire que 2 ≤ ◬ < Ѫ ≤ 3. Il suit alors que $\boxed{◬ = 2}$ et que $\boxed{Ѫ = 3}$.

Toujours au sujet de ces deux dates (ƻʢ◬Ѫ et ƻʢѪ₪) on sait que ƻ◬ années les séparent. En remplaçant les symboles connus par leur chiffre, on obtient qu'entre 1923 et 193₪, il y a 12 années d'écart. Cela nous permet de trouver que $\boxed{₪ = 5}$.

Ensuite, en reprenant l'information de départ du texte « *formé il y a ℧Ø ans en ƻʢѪ₪* », nous savons que le groupe a donc été formé en 1935. C'était il y a 86 ans et donc $\boxed{℧ = 8}$ et $\boxed{Ø = 6}$.

Dans l'avant dernier paragraphe, il est précisé que le groupe est devenu une association le ѪꝒ/Ꝓ℧/ƻʢ₪◬ soit ƻ✠ ans après la formation du groupe en 1935. En remplaçant les symboles connus on obtient que le 31/08/1952, soit 1✠ après la formation du groupe qui a eu lieu en 1935 et donc et $\boxed{✠ = 7}$.

Il ne reste alors que le symbole ▷ qui est donc par élimination le chiffre 4 : $\boxed{▷= 4}$

Finalement, on a les correspondances suivantes :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ꝓ	ƻ	◬	Ѫ	▷	₪	Ø	✠	℧	ʢ

Le texte est alors :

Nicolas Bourbaki est un mathématicien fictif. Il fut inventé par un groupe de mathématiciens francophones, formé il y a 86 ans en 1935 à Besse en Auvergne avec pour objectif de rédiger en 3 ans un traité d'analyse. Finalement, le premier chapitre nécessitera 4 ans à lui-seul et rapidement le projet devint la rédaction d'un traité sur la mathématique toute entière. L'ampleur de la tâche est telle qu'elle se poursuit encore aujourd'hui.

Ses premières publications sont novatrices et on doit au groupe « Bourbaki » la popularisation de nombreux symboles, termes et notions aujourd'hui incontournables en mathématiques, mais aussi un style d'écriture précis dans la formulation des mathématiques.

Bourbaki, c'est aussi de nombreux textes humoristiques que le groupe publie dans sa revue interne. Le nom de famille « Bourbaki » lui-même a pour origine un canular : en 1923 (soit 12 ans avant la formation du groupe à Besse), un étudiant de l'ENS, déguisé en vieux barbu, a donné une fausse conférence, volontairement incompréhensible et avec des raisonnements subtilement faux.

Finalement, c'est 17 ans après la formation du groupe à Besse que « Bourbaki » se constitue en association le 30/08/1952. Depuis, les membres se sont renouvelés dans le secret ! En effet les noms des membres actuels du groupe ne sont pas connus.

Tout comme le style ou les canulars, l'aura de mystère de cette société secrète de mathématiciens fait partie intégrante de l'identité de Bourbaki.

Note :

Comme nous l'avons vu dans la correction, toutes les informations que l'on pourrait extraire du texte ne sont pas nécessaires pour résoudre le problème. Il y a de nombreux chemins pour raisonner.

Il est aussi possible de procéder par essai et erreur pour trouver certains nombres.

Problème 5

LE TOUR DU PATE DE MAISON

NIVEAU 2

Note : dans les illustrations suivantes, nous représentons le tour que j'effectue en bleu, tandis que ceux de ma sœur sont représentés en rouge et en spirale.

Question 1 :

Nous allons d'abord déterminer le nombre de tour que fait ma sœur dans la situation abordée dans l'énoncé. Puisque ma sœur et moi allons dans le même sens :

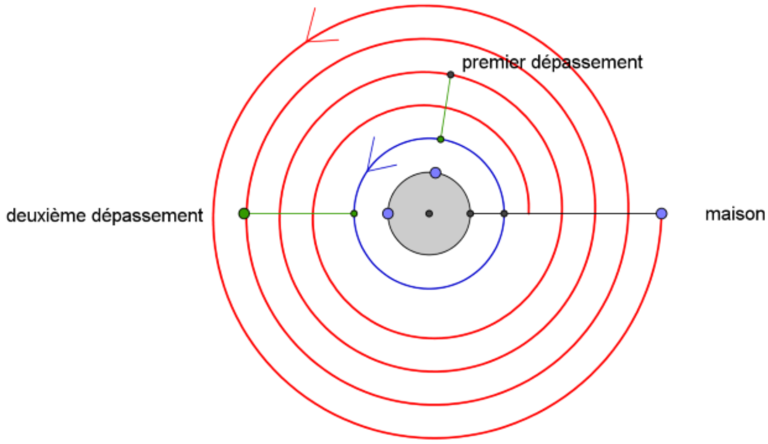
1/ Nous partons ensemble de la maison, j'avance un peu tandis que ma sœur fait un tour complet sans me doubler.

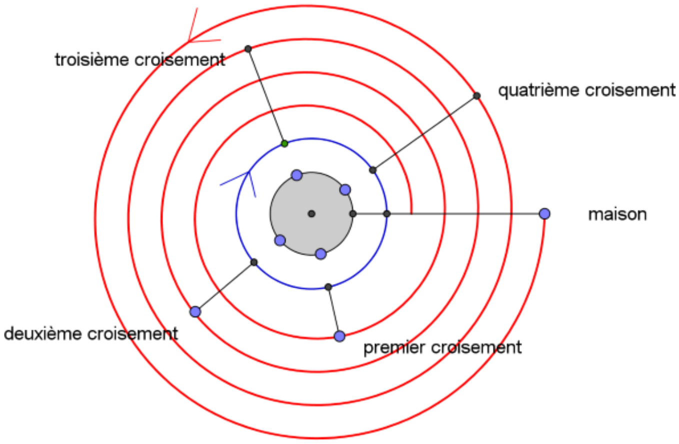
2/ Au cours de son deuxième tour, elle me double une première fois.

3/ Au cours de son troisième tour, elle me double une seconde fois.

4/ Elle fait un quatrième tour pour me rejoindre au moment où j'arrive à la maison sans me doubler.

Elle fait donc 4 tours de pâté de maisons pour me doubler deux fois.





Imaginons que ce soit moi qui fasse le tour dans l'autre sens. Ma sœur fait toujours 4 tours et va me croiser à chaque tour. Elle me rejoint à la maison à la fin du 4ème tour.

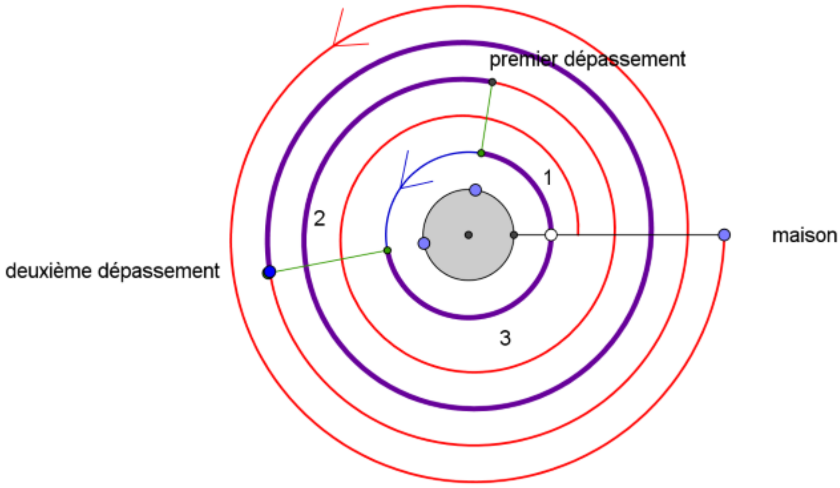
Elle me croise donc 4 fois.

Note : dans les illustrations suivantes, nous représentons le trajet du chien par la ligne épaisse violette qui « saute » entre mon tour et ceux de ma sœur au niveau des endroits où nous nous croisons. Chaque portion du trajet du chien est numérotée.

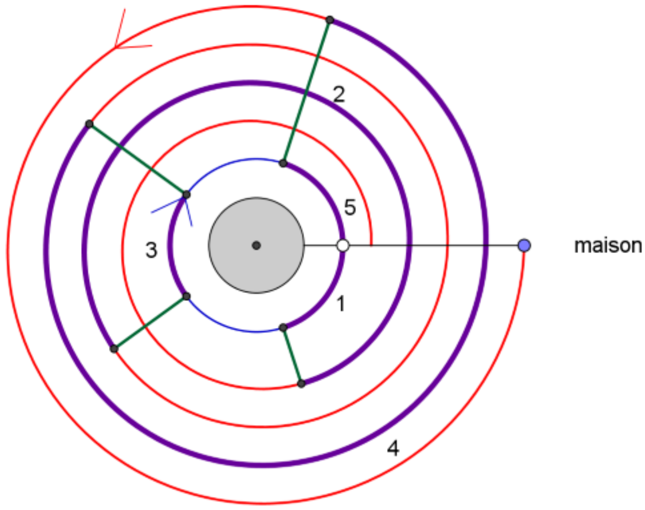
Question 2.a :

Si nous nous déplaçons à vitesse constante dans le même sens, je fais 1 km lorsque ma sœur parcourt 4 km et elle me double aux kilomètres 1 et 2. Si le chien part avec moi, il commence par faire 1 km avec moi, puis 4 km avec ma sœur avant de me rejoindre au km 2 du tour suivant, et fait le dernier kilomètre avec moi. Il a donc parcouru 2 tours, soit 6 km.

Remarque : Quelques soient nos vitesses et les lieux où l'on se croise ma sœur et moi, notre chien parcourt chaque endroit deux fois et fera quand même 2 tours donc 6 km.
Cette remarque offre une réponse à la question 3.a.



Question 2.b :



Si nous partons en sens inverse, nous nous croisons à chaque 1/5 du tour, soit tous les 600 m. Le chien fait 600 m avec moi, puis part en sens inverse avec ma sœur pour 2400 m, repart pour 600 m avec moi et fait à nouveau 2400 m avec ma sœur et finit par faire 600 m avec moi. Il fait donc 6,6 km.

Remarque : Dans cette question on remarque que le chien passe 3 fois par certains lieux et 1 seule fois par d'autres.

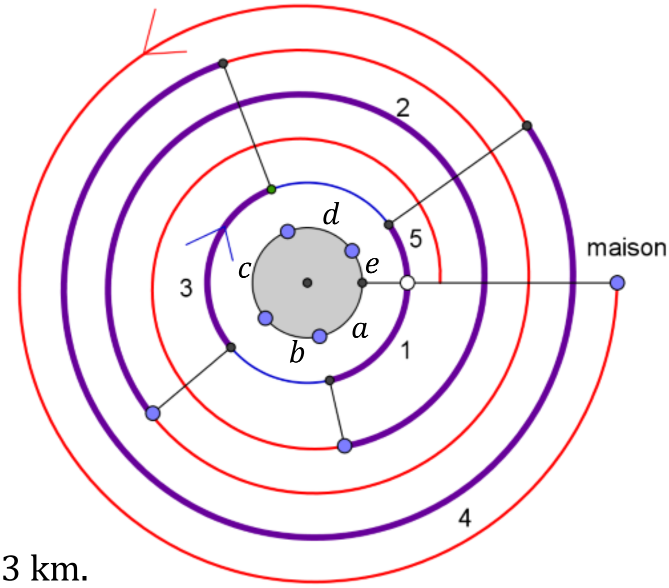
Question 3.a :

Si nous ne nous déplaçons pas à vitesse constante, les points de rencontre sont inconnus. Mais ça ne change rien au problème.

En effet, si nous circulons dans le même sens, le chien commence un tour avec moi, le finit avec ma sœur avec qui il en commence un second et termine ce tour avec moi. Il parcourt donc toujours 6 km.

Question 3.b :

Si nous ne nous déplaçons pas à vitesse constante, les points de rencontre sont inconnus. Notons a, b, c, d et e les longueurs (en km) des 5 portions de mon parcours entre la maison et les 4 lieux de rencontres. On a alors $a + b + c + d + e = 3$ km.



Et donc le chien fait :

- a km avec moi ;
- $3 - b$ km avec ma sœur ;
- c km avec moi ;
- $3 - d$ km avec ma sœur ;
- e km avec moi ;

… ce qui fait un total de :

$$6 + (a + c + e) - (b + d)$$

… ou encore :

$$3(a + c + e) + (b + d)$$

Or, on rappelle que $a + b + c + d + e = 3$ km.
Il resterait alors à savoir comment se répartissent les 3 km entre, d'une part la somme $(a + c + e)$ et d'autre part la somme $(b + d)$.

On va alors considérer deux situations extrêmes et possibles :

→ Si je ne bouge pas lorsque le chien est avec moi, cela veut dire que :

- $a + c + e = 0$;
- $b + d = 3$;

… et le chien parcourt donc $6 + 0 - 3$ soit 3 km.

→ Si je ne bouge que lorsque le chien est avec moi, cela veut dire que :

- $a + c + e = 3$;
- $b + d = 0$;

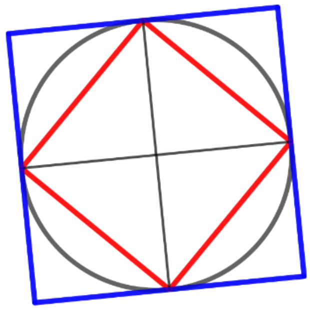
… et le chien parcourt donc $6 + 3 - 0$ soit 9 km.

Entre ces deux situations extrêmes, tout est envisageable mais on peut donc affirmer que le chien parcourt entre 3 et 9 kilomètres.

Les hexagones

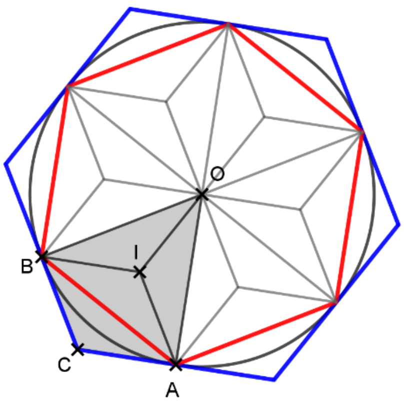
NIVEAU 3

Méthode 1 :



Dans l'exemple des carrés donné dans l'énoncé, en positionnant les petit et grand carrés comme ci-contre (sommet du petit carré positionné sur les milieux du grand carré) et en traçant les diagonales du petit carré, il apparait des triangles isocèles rectangles, tous égaux et donc, d'aires égales : le grand carré est alors formé de 8 triangles tandis que le petit en compte 4, soit la moitié.

On conclut alors directement que l'aire du carré inscrit est la moitié de l'aire du carré dans lequel est inscrit le cercle.



Dans le cas des hexagones, on peut procéder de même :

- on positionne les sommets du petit hexagone sur les milieux du grand ;
- on trace les diagonales du petit hexagone ;
- on place les centres des six triangles équilatéraux formés ;
- dans chaque triangle équilatéral, on trace les trois segments reliant ses sommets à son centre ;

… et on obtient le motif ci-dessous. On observera que ce motif est constitué de six réplications (par rotation de centre O) du motif grisé et que ce motif gris possède (OC) comme axe de symétrie.

Ainsi, pour justifier que tous les « petits triangles » de cette figure sont égaux, il suffit de démontrer que les triangles AIO, ABI et ABC le sont (l'égalité des autres triangles se déduisant des propriétés de la symétrie et des rotations citées ci-dessus).

La droite (AI) est un axe de symétrie du triangle équilatéral ABO. Les deux triangles AIO et ABI, images l'un de l'autre par cette symétrie, sont donc égaux.

Toujours par symétrie dans le triangle ABO, on peut établir que ces triangles sont isocèles en I avec des angles à la base de 30 °.

Les droites (OA) et (AC) sont perpendiculaires puisque (AC) est tangente au cercle (et que [OA] et un rayon du cercle). Alors $\widehat{BAC} = \widehat{OAC} - \widehat{OAB} = 90\ ° - 60\ ° = 30\ °$ et de même, $\widehat{ABC} = 30\ °$. Le triangle ABC est donc isocèle en C avec des angles à la base de 30 °. Il est donc semblable au triangles ABI.

Or, ils ont leur base commune, donc ils sont égaux.

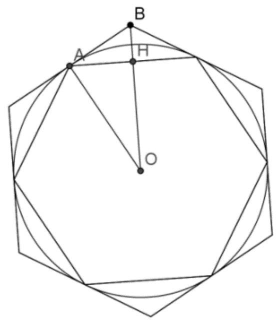
Finalement, on démontre bien que tous les « petits triangles » de cette figure sont égaux. Il reste alors simplement à les compter : il y en a 18 dans le petit hexagone et 24 dans le grand hexagone, ce qui donne un rapport de $\frac{18}{24}$ soit $\frac{3}{4}$.

<u>Méthode 2 :</u>

Au-delà de cette méthode graphique un peu « astucieuse », il existe une méthode calculatoire plus « classique » :

Tous les hexagones réguliers sont isomorphes (« semblables »).

Les rapports des aires est simplement égal au carré du rapport de réduction entre les deux hexagones, par exemple en calculant le rapport des diagonales : [AO] et [BO] (dans le schéma ci-contre).



Deux façons de calculer le carré du rapport $\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}}$ qui est $\left(\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}}\right)^2$ soit $\frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{BO}^2}$.

1/ trigonométrie

Puisque le triangle ABO est rectangle en A :

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{AOB}}\right) = \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}} \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}} = \cos(30\ °) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866025$$

Cette valeur exacte est obtenue grâce à la calculatrice ou en lisant certains rapporteurs circulaires. Alors, le rapport des aires est égal au carré du rapport des longueur et vaut :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

2/ théorème de Pythagore :

Dans le triangle ABO, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{AO}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2 \ \text{ donc } \ \mathrm{AO}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2.$$

Or, $\mathrm{OB} = 2\mathrm{AB}$ donc $\mathrm{OB}^2 = (2\mathrm{AB})^2 = 4\mathrm{AB}^2$:

$$\mathrm{AO}^2 = \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2 = 4\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AB}^2 = 3\mathrm{AB}^2.$$

… et finalement :

$$\frac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{BO}^2} = \frac{3\mathrm{AB}^2}{4\mathrm{AB}^2} = \frac{3}{4}$$

Dans les deux cas, on a bien également un rapport des aires égal à $\frac{3}{4}$.

Problème 7

DU TRAVAIL POUR PENELOPE

NIVEAU 3

<u>Question 1 :</u>

Les 6 tapis de Pénélope pour le nombre 12 sont :

12 2×6 $2 \times 2 \times 3$ 4×3 12	12 4×3 $2 \times 2 \times 3$ 2×6 12	12 6×2 $3 \times 2 \times 2$ 3×4 12	12 3×4 $3 \times 2 \times 2$ 6×2 12	12 6×2 $2 \times 3 \times 2$ 2×6 12	12 2×6 $2 \times 3 \times 2$ 6×2 12

<u>Question 2 :</u>

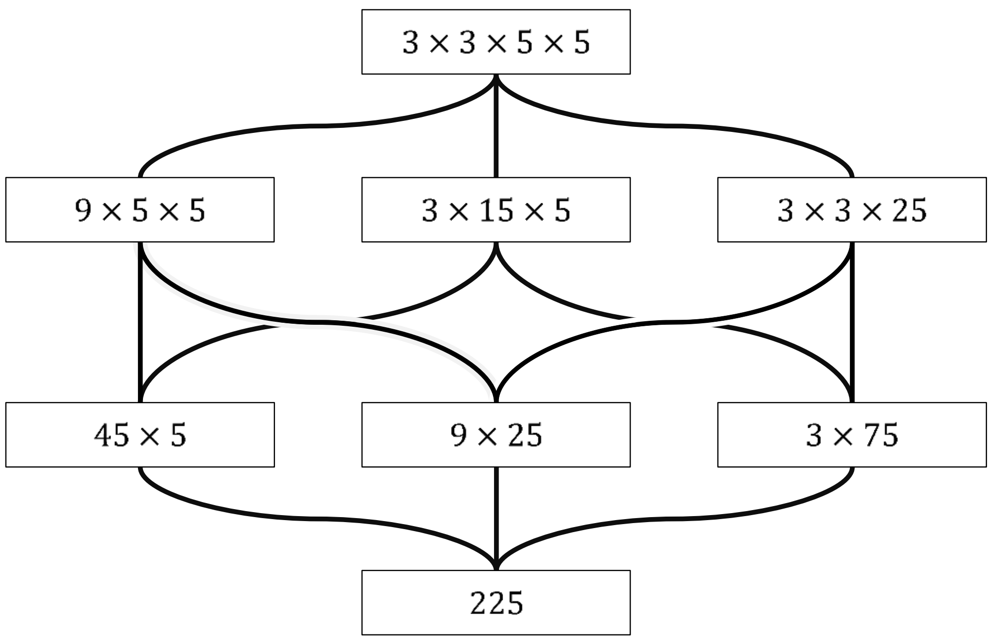
Le nombre 225 se décompose en produit de facteurs premiers comme suit :

$$225 = 3^2 \times 5^2$$

… ce qui se décline dans 6 arrangements différents :

$3 \times 3 \times 5 \times 5$	$3 \times 5 \times 3 \times 5$	$3 \times 5 \times 5 \times 3$
$5 \times 5 \times 3 \times 3$	$5 \times 3 \times 5 \times 3$	$5 \times 3 \times 3 \times 5$

Observons les différentes façons de recomposer 225 à partir de ses lignes :
Pour $3 \times 3 \times 5 \times 5$, on représente les différentes recombinaisons à l'aide du schéma suivant :



<u>Note :</u> ce genre de représentation est appelé « graphe » en mathématiques. Il est composés d' « arrêtes » qui sont les chemins, et de « sommets » qui sont les nœuds.

A partir de cette représentation, on obtient 1 tapis suivant la procédure suivante :

1/ on part de 225 ;

2/ on remonte jusqu'à $3 \times 3 \times 5 \times 5$ en suivant les chemins ;

3/ on redescend jusqu'à 225 en suivant un chemin mais sans repasser par une étiquette déjà visitée à la montée.

Avec un peu de méthode, on dénombrera 18 tapis possibles suivant cette procédure. Pour ce faire, on pourra par exemple se concentrer sur les chemins au centre du graphe : il faut en choisir 2 avec :

- 6 choix pour le premier ;
- 3 choix pour le second (6 chemins -1 chemin déjà emprunté -2 chemins qui ferait repasser par une même étiquette $= 3$) ;

… soit $(6 \times 3 =)$ 18 façons de choisir ces 2 chemins et donc 18 tapis possibles.

Pour le détail, les tapis ainsi obtenus sont (rangés en 6 lignes de trois tapis suivant les 6×3 choix possibles évoqués ci-dessus) :

225 45×5 $9 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 15 \times 5$ 3×75 225	225 45×5 $9 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 25$ 3×75 225	225 45×5 $9 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 25$ 9×25 225

225 45×5 $3 \times 15 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $9 \times 5 \times 5$ 9×25 225	225 45×5 $3 \times 15 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 25$ 9×25 225	225 45×5 $3 \times 15 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 25$ 3×75 225

225 9×25 $9 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 15 \times 5$ 45×5 225	225 9×25 $9 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 15 \times 5$ 3×75 225	225 9×25 $9 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 25$ 3×75 225

225 9×25 $3 \times 3 \times 25$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $9 \times 5 \times 5$ 45×5 225	225 9×25 $3 \times 3 \times 25$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 15 \times 5$ 45×5 225	225 9×25 $3 \times 3 \times 25$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 15 \times 5$ 3×75 225

225 3×75 $3 \times 15 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $9 \times 5 \times 5$ 45×5 225	225 3×75 $3 \times 15 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $9 \times 5 \times 5$ 9×25 225	225 3×75 $3 \times 15 \times 5$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 3 \times 25$ 9×25 225

225 3×75 $3 \times 3 \times 25$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $9 \times 5 \times 5$ 45×5 225	225 3×75 $3 \times 3 \times 25$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $9 \times 5 \times 5$ 9×25 225	225 3×75 $3 \times 3 \times 25$ $3 \times 3 \times 5 \times 5$ $3 \times 15 \times 5$ 45×5 225

En traçant les graphes équivalents pour les 5 autres arrangements possibles de la décomposition en produit de facteurs premiers de 225, on s'aperçoit qu'ils sont tous identiques (du point de vue de leur structure). On obtiendra donc 18 tapis pour chacun des 6 arrangements possibles de la décomposition en produit de facteurs premiers de 225, ce qui donne un nombre total de $18 \times 6 =$ **108 tapis**.